

ЛЕКЦИЯ 9

Тема 1.7. Основные понятия кинематики.

Кинематика точки

Иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении.

Знать способы задания движения точки (естественный и координатный).

Знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений (без вывода).

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры

Траектория

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют *траекторией*.

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении: $y = f(x)$.

Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение — S , единицы измерения — метры.

Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется *уравнением движения*.

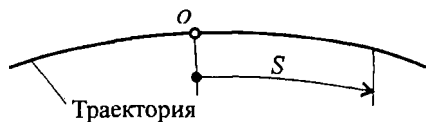


Рис. 9.1

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассмат-

риваемой как начало отсчета (рис. 9.1). Такой способ задания движения называется *естественным*.

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде $S = f(t)$. Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (рис. 9.2). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t). \end{cases}$$

В случае пространственного движения добавляется и третья координата $z = f_3(t)$.

Такой способ задания движения называют *координатным*.

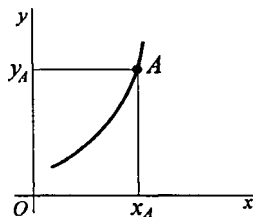


Рис. 9.2

Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется *скоростью*.

Скорость — вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения (рис. 9.3).

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют *равномерным*.

Средняя скорость на пути ΔS определяется как

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS — пройденный путь за время Δt ; Δt — промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют *неравномерным*.

В этом случае скорость — величина переменная и зависит от времени $v = f(t)$.

При рассмотрении малых промежутков времени ($\Delta t \rightarrow 0$) средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как

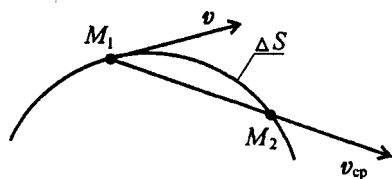


Рис. 9.3

производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}.$$

За единицу скорости принимают 1 м/с. Иногда скорость измеряют в км/ч, $1 \text{ км/ч} = \frac{1000}{3600} = 0,278 \text{ м/с}$.

Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется *ускорением точки*.

Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

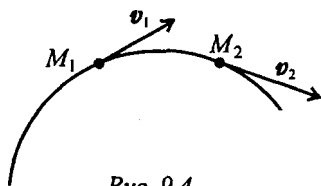


Рис. 9.4

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (рис. 9.4).}$$

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное (рис. 9.5).

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r — радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление *совпадает* с направлением скорости, а

при замедлении оно направлено *противоположно* направлению вектора скорости.

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''.$$

Значение *полного* ускорения определяется как $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ (рис. 9.6).

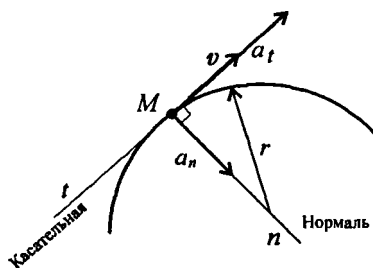


Рис. 9.5

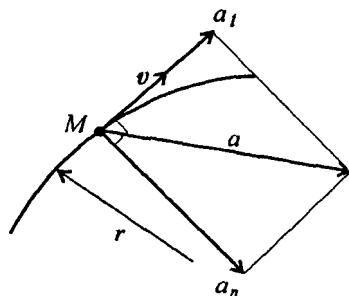


Рис. 9.6

Примеры решения задач

Пример 1. Дано уравнение движения точки: $S = 0,36t^2 + 0,18t$. Определить скорость точки в конце третьей секунды движения и среднюю скорость за первые 3 секунды.

Решение

1. Уравнение скорости $v = \frac{dS}{dt}$; $S' = 2 \cdot 0,36t + 0,18$; $v = 0,72t + 0,18$.
2. Скорость в конце третьей секунды ($t = 3$ с) $v_3 = 0,72 \cdot 3 + 0,18 = 2,34$ м/с.
3. Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$; $v_{\text{ср}} = (0,36 \cdot 3^2 + 0,18 \cdot 3)/3 = 1,26$ м/с.

Пример 2. Точка движется по кривой радиуса $r = 10$ м согласно уравнению $S = 2,5t^2 + 1,2t + 2,5$ (рис. 9.6).

Определить полное ускорение точки в конце второй секунды движения и указать направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке M .

Решение

1. Касательное ускорение определяется как $a_t = \frac{dv}{dt}$.

Уравнение скорости: $v = \frac{dS}{dt}$.

Скорость будет равна $v = 2 \cdot 2,5t + 1,2$; $v = 5t + 1,2$ (м/с).

Касательное ускорение: $a_t = v' = 5 \text{ м/с}^2$.

Вывод: касательное ускорение не зависит от времени, оно постоянно.

2. Нормальное ускорение: $a_n = \frac{v^2}{r}$.

Скорость на второй секунде будет равна $v_2 = 5 \cdot 2 + 1,2 = 11,2 \text{ м/с}$.

Величина нормального ускорения: $a_{n2} = \frac{(11,2)^2}{10} = 12,54 \text{ м/с}^2$.

3. Полное ускорение: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Полное ускорение в конце второй секунды:

$$a_2 = \sqrt{5^2 + 12,54^2} = 13,5 \text{ м/с}^2.$$

4. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение направлено по касательной к кривой и совпадает с направлением скорости, т. к. касательное ускорение — положительная величина (скорость растет).

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.
2. Что называют траекторией движения?
3. Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?
4. Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.
5. Что характеризует касательное ускорение и как оно направлено по отношению к вектору скорости?
6. Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?

ЛЕКЦИЯ 10

Тема 1.8. Кинематика точки

Иметь представление о скоростях средней и истинной, об ускорении при прямолинейном и криволинейном движениях, о различных видах движения точки.

Знать формулы (без вывода) и графики равномерного и равнопеременного движений точки.

Уметь определять параметры движения точки по заданному закону движения, строить и читать кинематические графики.

Анализ видов и кинетических параметров движений

Равномерное движение

Равномерное движение — это движение с постоянной скоростью:

$$v = \text{const.}$$

Для прямолинейного равномерного движения (рис. 10.1а)

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0;$$

$$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0.$$

Полное ускорение движения точки равно нулю: $a = 0$.

При криволинейном равномерном движении (рис. 10.1б)

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0.$$

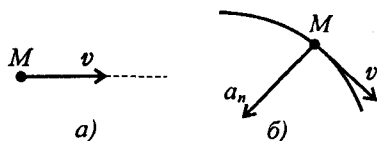


Рис. 10.1

Полное ускорение равно нормальному ускорению: $a = a_n$.

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как $v = \text{const}$, закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой: $S = S_0 + vt$, где S_0 — путь, пройденный до начала отсчета.

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение — это движение с постоянным касательным ускорением:

$$a_t = \text{const.}$$

Для прямолинейного равнопеременного движения

$$r = \infty \Rightarrow a_n = 0; \quad a = a_t = \text{const.}$$

Полное ускорение равно касательному ускорению.

Криволинейное равнопеременное движение (рис. 10.2):

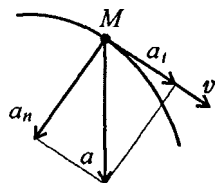


Рис. 10.2

$$a_n \neq 0; \quad a_t = \text{const} \neq 0.$$

Учитывая, что $a_t = \frac{dv}{dt}$; $a_t = \text{const}$ и сделав ряд преобразований:

$$dv = a_t dt; \quad \int_v dv = a_t \int_t dt,$$

получим значение скорости при равнопеременном движении

$$v = v_0 + a_t t; \quad v = \frac{dS}{dt}.$$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременного движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость движения;

S_0 — путь, пройденный до начала отсчета;

a_t — постоянное касательное ускорение.

Неравномерное движение

При *неравномерном движении* численные значения скорости и ускорения меняются.

Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей $S = f(t^3)$ и выше степени.

Кинематические графики

Кинематические графики — это графики изменения пути, скорости и ускорений в зависимости от времени.

Равномерное движение (рис. 10.3)

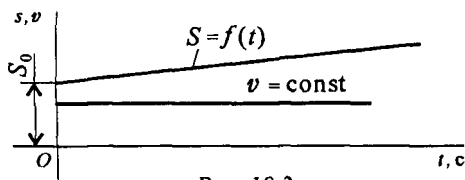


Рис. 10.3

Равнопеременное движение (рис. 10.4)

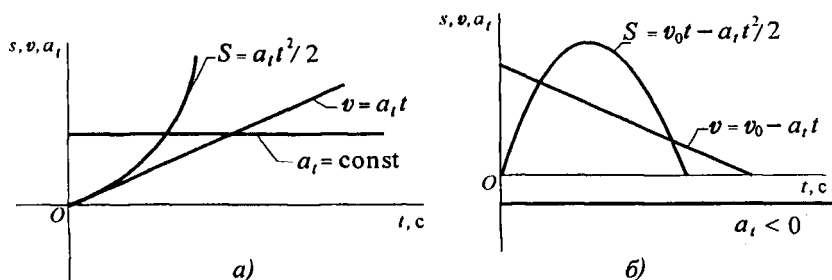


Рис. 10.4

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному закону движения $S = 10 + 20t - 5t^2$ ($[S] = \text{м}$; $[t] = \text{с}$) определить вид движения, начальную скорость и касательное ускорение точки, время до остановки.

(Рекомендуется обойтись без расчетов, использовать метод сравнения заданного уравнения с уравнениями различных видов движений в общем виде.)

Решение

1. Вид движения: равнопеременное ($S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$).

2. При сравнении уравнений очевидно, что
- начальный путь, пройденный до начала отсчета 10 м;
 - начальная скорость 20 м/с;
 - постоянное касательное ускорение $\frac{a_t}{2} = -5 \text{ м/с}^2$; $a_t = -10 \text{ м/с}^2$.
 - ускорение отрицательное, следовательно, движение замедленное (равнозамедленное), ускорение направлено в сторону, противоположную направлению скорости движения.

3. Можно определить время, при котором скорость точки будет равна нулю: $v = S' = 20 - 2 \cdot 5t$; $v = 20 - 10t$; $v = 0$; $t = \frac{20}{10} = 2 \text{ с}$.

Примечание. Если при равнопеременном движении скорость растет, значит, ускорение — положительная величина, график пути — вогнутая парабола. При торможении скорость падает, ускорение (замедление) — отрицательная величина, график пути — выпуклая парабола (рис. 10.4).

Пример 2. Точка движется по желобу из точки A в точку D (рис. 10.5).

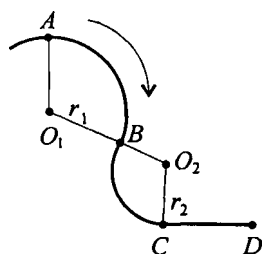


Рис. 10.5

Как изменятся касательное и нормальное ускорения при прохождении точки через B и C ?

Скорость движения считать постоянной. Радиус участка $AB = 10 \text{ м}$, радиус участка $BC = 5 \text{ м}$.

Решение

1. Рассмотрим участок AB .

Касательное ускорение равно нулю ($v = \text{const}$).

Нормальное ускорение $\left(a_n = \frac{v^2}{r}\right)$ при перехо-

де через точку B увеличивается в 2 раза, оно меняет направление, т. к. центр дуги AB не совпадает с центром дуги BC .

2. На участке BC :

— касательное ускорение равно нулю: $a_t = 0$;

— нормальное ускорение при переходе через точку C меняется: до точки C движение вращательное, после точки C движение становится прямолинейным, нормальное напряжение на прямолинейном участке равно нулю.

3. На участке CD полное ускорение равно нулю.

Пример 3. По заданному графику скорости найти путь, пройденный за время движения (рис. 10.6).

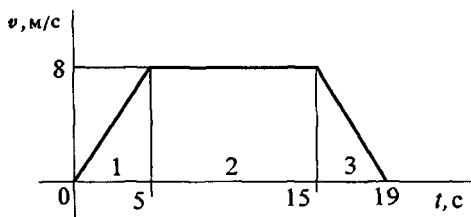


Рис. 10.6

Решение

1. По графику следует рассмотреть три участка движения.

Первый участок — разгон из состояния покоя (равноускоренное движение).

Уравнение скорости $v_1 = v_0 + a_1 t_1$; $v_0 = 0$.

Ускорение $a_1 = \frac{v_1}{t_1}$; $a_1 = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ м/с}^2$.

Второй участок — равномерное движение: $v = 8 \text{ м/с}$; $a_2 = 0$.

Третий участок — торможение до остановки (равнозамедленное движение).

Уравнение скорости $v_3 = v_{03} + a_3 t_3$; $v_3 = 0$.

Ускорение $a_3 = -\frac{v_{03}}{t_3}$; $a_3 = -\frac{8}{4} = -2 \text{ м/с}^2$.

2. Путь, пройденный за время движения, будет равен:

первый участок: $S_1 = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$; $S_0 = 0$; $v_0 = 0$;

$$S_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}; \quad S_1 = \frac{1,6 \cdot 5^2}{2} = 20 \text{ м};$$

второй участок: $S_2 = vt_2 = 8 \cdot 10 = 80 \text{ м}$;

третий участок: $S_3 = S_{03} + v_{03} t_3 + \frac{a_3 t_3^2}{2}$; $S_{03} = S_1 + S_2$;

$v_{03} = 8 \text{ м/с}$; $a_3 = -2 \text{ м/с}^2$.

Путь за время движения

$$S_{\Sigma} = S_3 = 100 + 8 \cdot 4 + \frac{-2 \cdot 4^2}{2} = 116 \text{ м}.$$

Пример 4. Тело, имевшее начальную скорость 36 км/ч, прошло 50 м до остановки. Считая движение равнозамедленным, определить время торможения.

Решение

1. Записываем уравнение скорости для равнозамедленного движения:

$$v = v_0 + at = 0.$$

Определяем начальную скорость в м/с: $v_0 = \frac{36 \cdot 1000}{3600} = 10 \text{ м/с}$.

Выразим ускорение (замедление) из уравнения скорости:

$$a = -\frac{v_0}{t}.$$

2. Записываем уравнение пути: $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

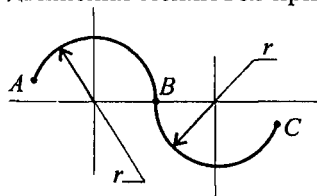
После подстановки получим: $S = \frac{v_0 t}{2}$.

3. Определяем время до полной остановки (время торможения):

$$t = \frac{2S}{v_0} = \frac{2 \cdot 50}{10} = 10 \text{ с}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулу ускорения при прямолинейном движении.
2. Запишите формулу ускорения (полного) при криволинейном движении.
3. Тело скатывается по желобу (рис. 10.7). Какие параметры движения меняются при переходе через точку B и почему?



Ответы:

1. a_n .
2. a_t .
3. v .
4. Параметры движения не меняются.

Рис. 10.7

4. По заданному уравнению движения точки $S = 25 + 1,5t + 6t^2$ определите вид движения и без расчетов, используя законы движения точки, ответьте, чему равны начальная скорость и ускорение.

5. По заданному уравнению движения точки $S = 22t - 4t^2$ постройте графики скорости и касательного ускорения.

6. По графику скоростей точки определите путь, пройденный за время движения (рис. 10.8).

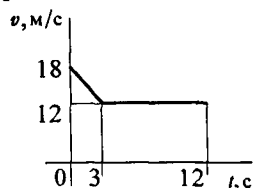


Рис. 10.8

7. Точка движется по дуге. Охарактеризуйте движение точки (рис. 10.9).

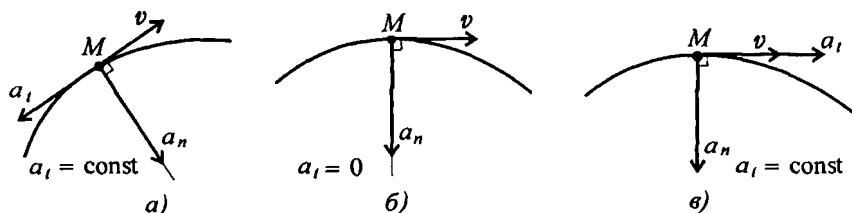
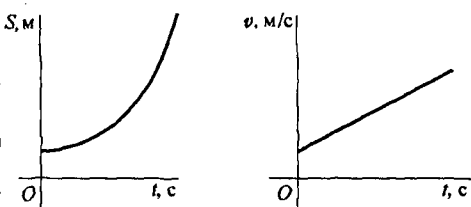
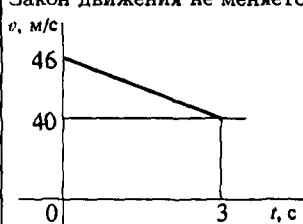


Рис. 10.9

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Темы 1.7, 1.8. Кинематика. Кинематика точки

В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
1. Точка движется по линии ABC . По изображенным параметрам движения определить вид движения.	Равномерное	1
	Равноускоренное	2
	Равнозамедленное	3
	Неравномерное	4

Продолжение		
В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
2. По приведенным кинематическим графикам определить вид движения точки. 	$S = vt$	1
	$S = S_0 + \frac{at^2}{2}$	2
	$S = S_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$	3
	$S = v_0t - \frac{at^2}{2}$	4
3. Автомобиль движется по арочному мосту согласно уравнению $S = 12t$. Определить полное ускорение автомобиля, если радиус моста $r = 100$ м, время движения $t = 5$ с.	$a = 1,44 \text{ м/с}^2$	1
	$a = 0,12 \text{ м/с}^2$	2
	$a = 0,6 \text{ м/с}^2$	3
	$a = 36 \text{ м/с}^2$	4
4. По графику скорости определить время движения точки до полной остановки. Закон движения не меняется. 	$t_{\text{ост}} = 6 \text{ с}$	1
	$t_{\text{ост}} = 12 \text{ с}$	2
	$t_{\text{ост}} = 23 \text{ с}$	3
	$t_{\text{ост}} = 43 \text{ с}$	4
5. Тело, двигаясь из состояния покоя равноускоренно, за 10 с достигло скорости 45 м/с. Определить путь, пройденный за время движения.	105 м	1
	125 м	2
	22,5 м	3
	225 м	4

ЛЕКЦИЯ 11

Тема 1.9. Простейшие движения твердого тела

Иметь представление о поступательном движении, его особенностях и параметрах, о вращательном движении тела и его параметрах.

Знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений тела.

Уметь определять кинематические параметры тела при поступательном и вращательном движениях, определять параметры любой точки тела.

Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной своему начальному положению (рис. 11.1, 11.2).

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково: скорости и ускорения в каждый момент одинаковы. Поэтому для описания движения тела можно рассматривать движение одной его точки, обычно центра масс.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным.

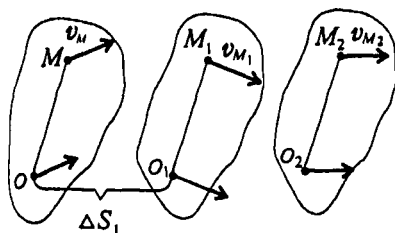


Рис. 11.1

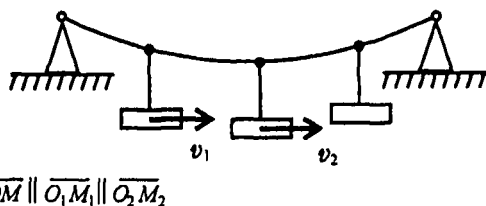


Рис. 11.2

Вращательное движение

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг общей неподвижной оси.

Неподвижная ось, вокруг которой вращаются все точки тела называется *осью вращения*.

При этом каждая точка движется по окружности, радиус которой равен расстоянию точки до оси вращения. Точки на оси вращения не перемещаются.

Для описания вращательного движения тела вокруг неподвижной оси можно использовать только угловые параметры (рис. 11.3):

φ — угол поворота тела, $[\varphi] = \text{рад}$;

ω — угловая скорость, определяет изменение угла поворота в единицу времени, $[\omega] = \text{рад/с}$.

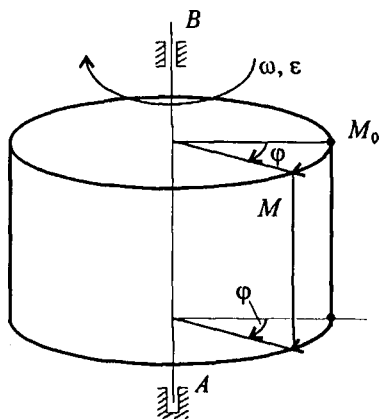


Рис. 11.3

Для определения положения тела в любой момент времени используется уравнение $\varphi = f(t)$.

Следовательно, для определения угловой скорости можно пользоваться выражением $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Иногда для оценки быстроты вращения используют угловую частоту вращения n , которая оценивается в оборотах в минуту.

Угловая скорость и частота вращения физически близкие величины:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Изменение угловой скорости во времени определяется угловым ускорением ε , $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Частные случаи вращательного движения

Равномерное вращение (угловая скорость постоянна):

$$\omega = \text{const.}$$

Уравнение (закон) равномерного вращения в данном случае имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 — угол поворота до начала отсчета.

Кинематические графики для этого вида движения изображены на рис. 11.4.

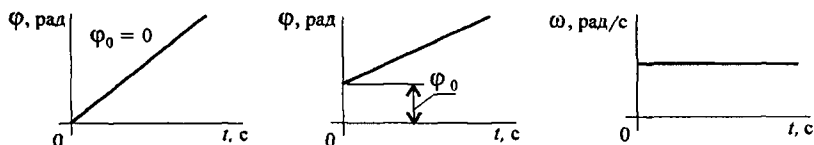


Рис. 11.4

Равнопеременное вращение (угловое ускорение постоянно):

$$\varepsilon = \text{const.}$$

Уравнение (закон) равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

Угловое ускорение *при ускоренном* движении — величина *положительная*; угловая скорость будет все время возрастать.

Угловое ускорение *при замедленном* движении — величина *отрицательная*; угловая скорость убывает.

Для данного движения кинематические графики представлены на рис. 11.5.

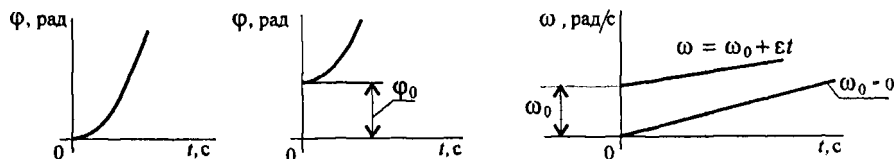


Рис. 11.5

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Тело вращается вокруг точки O . Определим параметры движения точки A , расположенной на расстоянии r_A от оси вращения (рис. 11.6, 11.7).

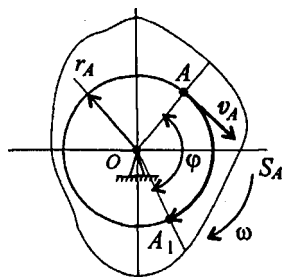


Рис. 11.6

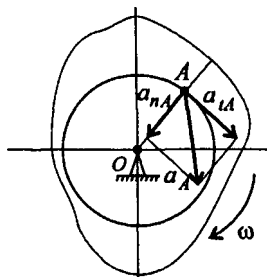


Рис. 11.7

Путь точки A : $S_A = \varphi r_A$.

Линейная скорость точки A : $v_A = \omega r_A$.

Ускорения точки A : $a_{tA} = \varepsilon r_A$ — касательное; $a_{nA} = \omega^2 r_A$ — нормальное, где r_A — радиус окружности, траектории точки A .

Примеры решения задач

Пример 1. По заданному графику угловой скорости (рис. 11.8) определить вид вращательного движения.

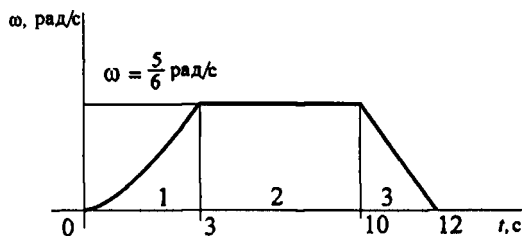


Рис. 11.8

Решение

1. Участок 1 — неравномерное ускоренное движение, $\omega = \varphi'$; $\varepsilon = \omega'$.
2. Участок 2 — скорость постоянна — движение равномерное, $\omega = \text{const}$.
3. Участок 3 — скорость убывает равномерно — равнозамедленное движение, $\varepsilon = \omega' < 0$.

Пример 2. Ротор электродвигателя вращается со скоростью, описываемой уравнением $\omega = 2\pi t$. Определить вид движения.

Решение

1. Анализируем выражение для скорости: скорость меняется и зависит от времени линейно. Следовательно, угловое ускорение — постоянно, $\epsilon = \omega' = 2\pi = \text{const}$.

2. Движение равнопеременное (равноускоренное, т. к. ускорение положительно).

Пример 3. Тело вращалось равноускоренно из состояния покоя и сделало 360 оборотов за 2 мин. Определить угловое ускорение.

Решение

1. Один оборот равен 2π радиан. Следовательно:

$$360 \text{ оборотов} = 720\pi \text{ рад}, \quad \varphi = 720\pi \text{ рад.}$$

2. Закон равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}.$$

В данном случае $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$.

Следовательно, $\varphi = \frac{\epsilon t^2}{2}$.

Откуда $\epsilon = \frac{2\varphi}{t^2}$.

3. Угловое ускорение равно $\epsilon = \frac{2 \cdot 720 \cdot \pi}{(120)^2} = 0,314 \text{ рад/с}^2$.

Пример 4. Тело вращалось с угловой частотой 1200 об/мин. Затем движение стало равнозамедленным, и за 30 секунд скорость упала до 900 об/мин. Определить число оборотов тела за это время и время до полной остановки.

Решение

1. Построить график изменения скорости за 30 с (рис. 11.9).
Определяем угловую скорость вращения тела:

$$\omega_0 = \frac{1200 \cdot \pi}{30} = 40\pi \text{ рад/с}; \quad \omega = \frac{900\pi}{30} = 30\pi \text{ рад/с.}$$

Определяем угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{30\pi - 40\pi}{30} = -\frac{1}{3}\pi \text{ рад/с}^2.$$

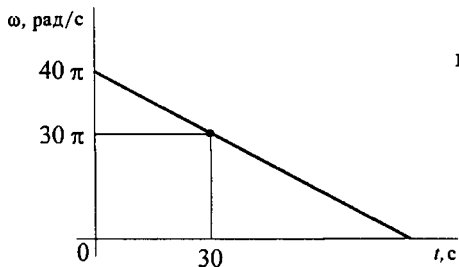


Рис. 11.9

Определяем угол поворота за прошедшее время:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi = 40\pi \cdot 30 - \frac{1}{3} \frac{\pi \cdot (30)^2}{2};$$

$$\varphi = 1050\pi \text{ рад.}$$

$$\text{Число оборотов за 30 с: } z = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1050\pi}{2\pi} = 525 \text{ об.}$$

2. Определяем время до полной остановки.

Скорость при остановке равна нулю, $\omega = 0$.

Таким образом, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$; $0 = \omega_0 + \varepsilon t$.

$$\text{Тогда } t_{\text{ост}} = -\frac{\omega_0}{\varepsilon}; t_{\text{ост}} = \frac{40\pi \cdot 3}{\pi} = 120 \text{ с.}$$

Пример 5. Маховое колесо вращается равномерно со скоростью 120 об/мин (рис. 11.10). Радиус колеса 0,3 м. Определить скорость и полное ускорение точек на ободе колеса, а также скорость точки, находящейся на расстоянии 0,15 м от центра.

Решение

1. Угловая скорость

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 120}{30} \approx 12,56 \text{ рад/с.}$$

2. Линейная скорость на ободе колеса

$$v = \omega r; v_A = \omega r_A; v_A = 12,56 \cdot 0,3 = 3,77 \text{ м/с.}$$

3. Скорость в точке C (рис. 11.10)

$$v_C = \omega r_C; v_C = 12,56 \cdot 0,15 = 1,88 \text{ м/с.}$$

4. Угловое ускорение $\varepsilon = \omega' = 0$.

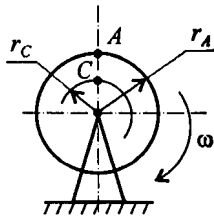


Рис. 11.10

Касательное ускорение точки A $a_{tA} = 0$; нормальное ускорение точки A $a_{nA} = \omega^2 r_A$; $a_{nA} = (12,56)^2 \cdot 0,3 = 47,3 \text{ м/с}^2$.

5. Полное ускорение точек на ободе колеса

$$a_A = \sqrt{a_{tA}^2 + a_{nA}^2}; \quad a_A = a_{nA} = 47,3 \text{ м/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какими кинематическими параметрами характеризуется поступательное движение и почему?

2. Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела.

3. Запишите уравнение равнопеременного поступательного движения твердого тела.

4. Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела.

5. Задано уравнение движения тела $S = f(t)$. Как определяют скорость и ускорение?

6. Для заданного закона (уравнения) движения $\varphi = 6,28 + 12t + 3t^2$ выберите соответствующий кинематический график движения (рис. 11.11).

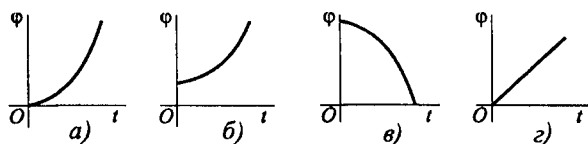


Рис. 11.11

7. Для движения, закон которого задан в вопросе 6, определите угловое ускорение в момент $t = 5 \text{ с}$.

ЛЕКЦИЯ 12

Тема 1.10. Сложное движение точки. Сложное движение твердого тела

Иметь представление о системах координат, об абсолютном, относительном и переносном движениях.

Знать разложение сложного движения на относительное и переносное, теорему сложения скоростей.

Знать разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное, способы определения мгновенного центра скоростей.

Основные определения

Сложным движением считают движение, которое можно разложить на несколько простых. Простыми движениями считают поступательное и вращательное.

Для рассмотрения сложного движения точки выбирают две системы отсчета: подвижную и неподвижную.

Движение точки (тела) относительно *неподвижной* системы отсчета называют *сложным*, или *абсолютным*.

Подвижную систему отсчета обычно связывают с движущимся телом. Движение *подвижной* системы отсчета относительно неподвижной называют *переносным*.

Движение материальной точки (тела) по отношению к подвижной системе называют *относительным*.

Примером может служить движение человека по эскалатору метро. Движение эскалатора — переносное движение, движение человека вниз или вверх по эскалатору — относительное, а движение по отношению к неподвижным стенам станции — сложное (абсолютное) движение.

При решении задач используют теорему о сложении скоростей:

При сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной (v_e) и относительной (v_r) скоростей:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos \alpha},$$

α — угол между векторами v_e и v_r .

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным, или *плоским*, называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной в рассматриваемой системе отсчета плоскости.

Плоскопараллельное движение можно изучать, рассматривая любое плоское сечение тела, параллельное неподвижной плоскости, называемой *основной* (рис. 12.1).

Все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к основной плоскости, движутся одинаково.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом разложения сложного движения на поступательное и вращательное и методом мгновенных центров скоростей.

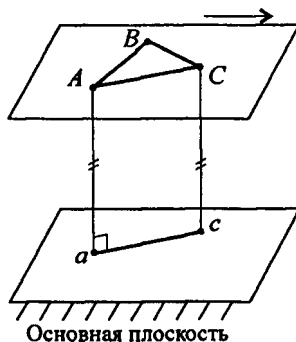


Рис. 12.1

Метод разложения сложного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение раскладывают на два движения: *поступательное* вместе с некоторым полюсом и *вращательное* относительно этого полюса.

Разложение используют для определения скорости любой точки тела, применяя теорему о сложении скоростей (рис. 12.2).

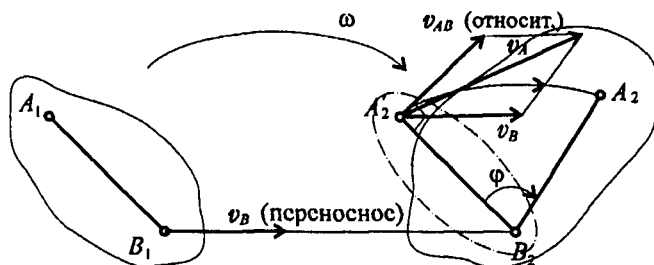


Рис. 12.2

Точка A движется вместе с точкой B , а затем поворачивается

вокруг B с угловой скоростью ω , тогда абсолютная скорость точки A будет равна

$$v_A = v_B + v_{AB}, \quad v_{AB} = \omega r \quad (r = AB).$$

Примером плоскопараллельного движения может быть движение колеса на прямолинейном участке дороги (рис. 12.3).

Скорость точки M

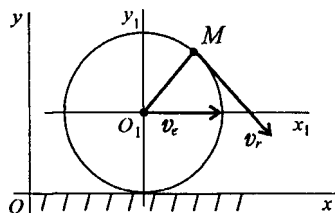


Рис. 12.3

$$v_M = v_e + v_r,$$

v_e — скорость центра колеса переносная
 v_r — скорость вокруг центра относительная.

yOx — неподвижная система координат
 $y_1O_1x_1$ — подвижная система координат, связанная с осью колеса.

Метод определения мгновенного центра скоростей

Скорость любой точки тела можно определять с помощью мгновенного центра скоростей. При этом сложное движение представляют в виде цепи вращений вокруг разных центров.

Задача сводится к определению положения мгновенного центра вращений (скоростей) (рис. 12.4).

Мгновенным центром скоростей (МЦС) является точка на плоскости, абсолютная скорость которой в данный момент равна нулю.

Вокруг этой точки тело совершает поворот со скоростью ω .

Скорость точки A в данный момент равна

$$v_A = \omega OA,$$

т. к. v_A — линейная скорость точки A , вращающейся вокруг МЦС.

Существуют три способа определения положения мгновенного центра скоростей.

Первый способ. Известна скорость одной точки тела v_A и угловая скорость вращения тела ω (рис. 12.5).

Точку O находим на перпендикуляре к вектору скорости v_A .

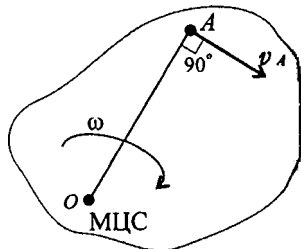


Рис. 12.4

$$AO = \frac{v_A}{\omega}.$$

Соединяем точку O с точкой B , измеряем расстояние OB .
 $v_B \perp OB$, $v_B = \omega OB$.

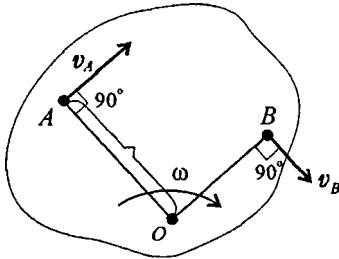


Рис. 12.5

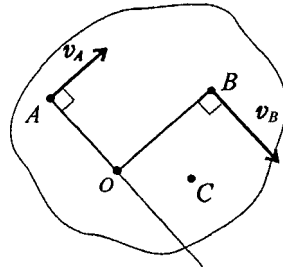


Рис. 12.6

Второй способ. Известны скорости двух точек тела v_A и v_B , и они не параллельны (рис. 12.6).

Проводим из точек A и B два перпендикуляра к известным векторам скоростей.

На пересечении перпендикуляров находим МЦС. Далее можно найти скорость любой точки C . $\frac{v_C}{v_B} = \frac{OC}{OB}$.

Третий способ. Известны скорости двух точек тела, и они параллельны ($v_A \parallel v_B$) (рис. 12.7).

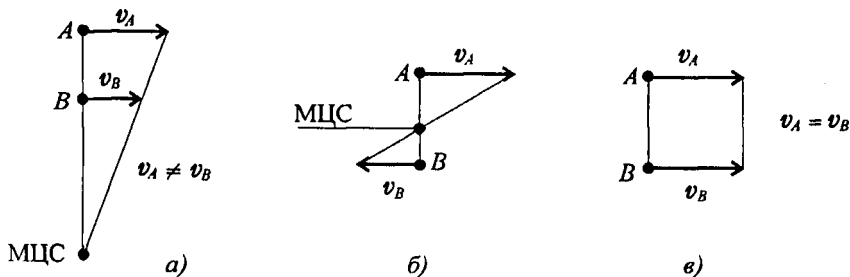


Рис. 12.7

Соединяем концы векторов, МЦС находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов с линией AB (рис. 12.7). При поступательном движении тела (рис. 12.7в) МЦС отсутствует.

Примеры решения задач

Пример 1. Рассмотрим механизм, в котором стержень OA вращается вокруг точки O со скоростью ω . Вдоль стержня перемещается ползун M со скоростью v_M (рис. 12.8). Определить абсолютную скорость точки M .

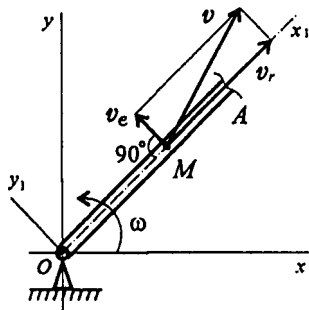


Рис. 12.8

Длина стержня 1,5 м; в момент, изображенный на чертеже, скорость точки B $v_B = 3$ м/с. Найти скорость точки A .

Решение

1. Найдем положение МЦС. Скорости точек A и B направлены вдоль стены и вдоль пола. Восстанавливая перпендикуляры к векторам скоростей, находим МЦС.

2. По известной скорости v_B определяем угловую скорость ω стержня:

$$\omega = \frac{v_B}{OB}; \quad OB = AB \sin 30^\circ = 0,75 \text{ м}; \quad \omega = \frac{3}{0,75} = 4 \text{ рад/с.}$$

3. Скорость точки A :

$$v_A = \omega OA; \quad OA = AB \cos 30^\circ \approx 1,3 \text{ м};$$

$$v_A = 4 \cdot 1,3 \approx 5,2 \text{ м/с.}$$

Решение

1. Относительное движение — вдоль стержня; скорость $v_r = v_M$.
2. Переносное движение — вращение стержня; скорость $v_e = \omega OM$.
3. Скорость абсолютного движения $v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$.

Пример 2. Стержень AB соскальзывает вниз, опираясь концами о стену и пол (рис. 12.9).

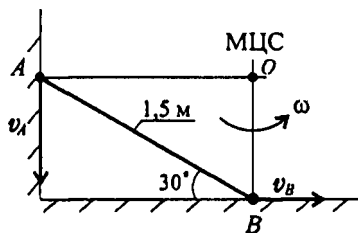


Рис. 12.9

Контрольные вопросы и задания

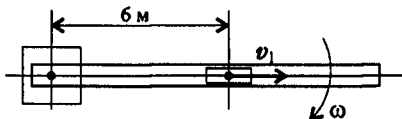
1. Какое движение называют сложным?
2. Какие движения твердого тела называют простыми?
3. Какие системы координат выбирают при определении скоростей твердых тел при сложном движении?
4. Какое движение считают переносным, а какое — относительным?
5. Сформулируйте теорему сложения скоростей.
6. Какое движение называют плоским?
7. Какие способы применяют для определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении?
8. Что такое мгновенный центр скоростей, как его определяют и для чего используют?
9. Ответьте на вопросы тестового задания.

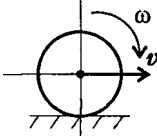
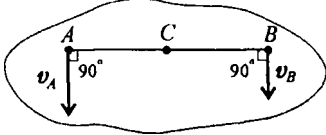
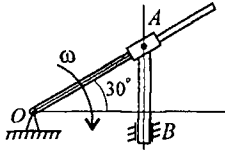
Темы 1.10, 1.11. Кинематика.

Сложное движение точки.

Сложное движение твердого тела

В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
1. Пассажир поезда, движущегося со скоростью 72 км/ч, видит встречный поезд длиной 420 м в течение 12 с. Определить скорость встречного поезда.	15 км/ч	1
	20,5 км/ч	2
	35 км/ч	3
	54 км/ч	4
2. Тележка движется по стреле башенного крана со скоростью 2 м/с. При этом стрела крана поворачивается со скоростью 0,25 рад/с. Определить скорость тележки по отношению к Земле.	1,2 м/с	1
	2 м/с	2
	2,5 м/с	3
	4,25 м/с	4



Продолжение		
В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
3. Колесо без скольжения катится по земле. Скорость вращения колеса $30,8 \text{ рад/с}$. Радиус колеса 650 мм. Определить скорость перемещения центра колеса относительно Земли. 	5 м/с	1
	10 м/с	2
	15 м/с	3
	20 м/с	4
4. Точки A, B и C принадлежат движущемуся плоскопараллельно телу. Определить скорость точки C, если известны скорости точек A и B. $v_A = 75 \text{ м/с}$; $v_B = 50 \text{ м/с}$; $AC = BC$. 	45 м/с	1
	50 м/с	2
	62,5 м/с	3
	75 м/с	4
5. Кривошип OA вращается вокруг оси O со скоростью 10 рад/с. Ползун A перемещается вдоль кривошипа и перемещает стержень AB. Определить скорость точки B, если $OA = 0,2 \text{ м}$. 	2 м/с	1
	2,3 м/с	2
	1 м/с	3
	8,6 м/с	4

ЛЕКЦИЯ 13

Тема 1.12. Основные понятия и аксиомы динамики. Понятие о трении

Иметь представление о массе тела и ускорении свободного падения, о связи между силовыми и кинематическими параметрами движения, о двух основных задачах динамики.

Знать аксиомы динамики и математическое выражение основного закона динамики.

Знать зависимости для определения силы трения.

Содержание и задачи динамики

Динамика — раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами.

В динамике решают два типа задач:

- определяют параметры движения по заданным силам;
- определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому динамику делят на динамику точки и динамику материальной системы.

Аксиомы динамики

Законы динамики обобщают результаты многочисленных опытов и наблюдений. Законы динамики, которые принято рассматривать как аксиомы, были сформулированы Ньютоном, но первый и четвертый законы были известны Галилею. Механику, основанную на этих законах, называют классической механикой.

Первая аксиома (принцип инерции)

Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Это состояние называют состоянием инерции. Вывести точку из этого состояния, т.е. сообщить ей некоторое ускорение, может внешняя сила.

Всякое тело (точка) обладает *инертностью*. Мерой инертности является масса тела.

Массой называют количество вещества в объеме тела, в классической механике ее считают величиной постоянной. Единица измерения массы — килограмм (кг).

Вторая аксиома (второй закон Ньютона — основной закон динамики)

Зависимость между силой, действующей на материальную точку, и сообщаемым ею ускорением следующая:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

где m — масса точки, кг; $\mathbf{a}$ — ускорение точки, м/с².

Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.

Основной закон динамики в дифференциальной форме:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2}, \quad \text{т.к.} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{S}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

На все тела на Земле действует сила тяжести, она сообщает телу ускорение свободного падения, направленное к центру Земли:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g},$$

где $g = 9,81$ м/с², ускорение свободного падения.

Третья аксиома (третий закон Ньютона)

Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис. 13.1):

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2; \quad \mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{a}_2.$$

Откуда

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

При взаимодействии ускорения обратно пропорциональны массам.

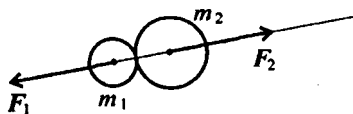


Рис. 13.1

Четвертая аксиома (закон независимости действия сил)

Каждая сила системы сил действует так, как она действовала бы одна.

Ускорение, сообщаемое точке системой сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщенных точке каждой силой в отдельности (рис. 13.2):

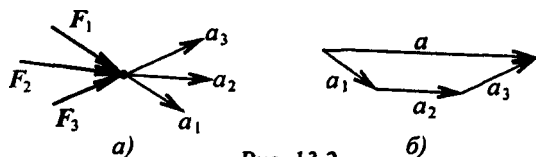


Рис. 13.2

$$F_{\Sigma} = ma; \quad a = \sum_0^n a_k.$$

Понятие о трении. Виды трения

Трение — сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении — трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

Трение скольжения

Причина — механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется *силой трения скольжения* (рис. 13.3а).

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{\text{тр}} = F_f = fR,$$

где R — сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;

f — коэффициент трения скольжения.

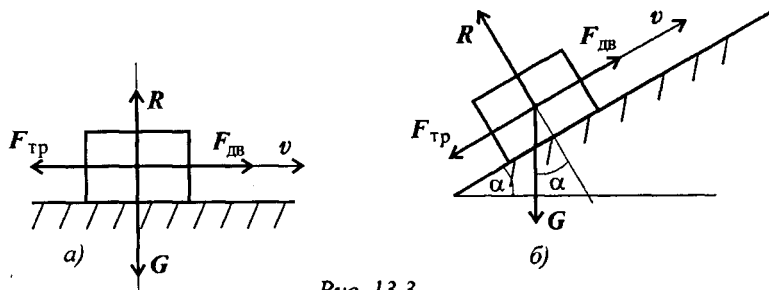


Рис. 13.3

В случае движения тела по наклонной плоскости (рис. 13.3б)

$$R = G \cos \alpha,$$

где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения.

2. Сила трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, называемого силой трения покоя (статическое трение):

$$0 < F_f \leq F_{f0},$$

F_{f0} — статическая сила трения (сила трения покоя).

3. Сила трения при движении меньше силы трения покоя. Сила трения при движении называется динамической силой трения (F_f)

$$F_f \leq F_{f0}.$$

Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и направления опорной поверхности, не меняется, то различают статический и динамический коэффициенты трения:

$$F_f = fR; \quad F_{f0} = f_0R.$$

Коэффициент трения скольжения зависит от следующих факторов:

— от материала: материалы делятся на *фрикционные* (с большим коэффициентом трения) и *антифрикционные* (с малым коэффициентом трения), например $f = 0,1 \div 0,15$ (при скольжении стали по стали всухую), $f = 0,2 \div 0,3$ (при скольжении стали по текстолиту)

— от наличия смазки, например $f = 0,04 \div 0,05$ (при скольжении стали по стали со смазкой);

— от скорости взаимного перемещения.

Трение качения

Сопротивление при качении связано с взаимной деформацией грунта и колеса и значительно меньше трения скольжения.

Обычно считают грунт мягче колеса, тогда в основном деформируется грунт, и в каждый момент колесо должно перекатываться через выступ грунта. Для равномерного качения колеса необходимо прикладывать силу $F_{\text{дв}}$ (рис. 13.4).

Условие качения колеса состоит в том, что движущийся момент должен быть не меньше момента сопротивления:

$$F_{\text{дв}} r \geq N k;$$

$$N = G; \quad F_{\text{дв}} \geq k \frac{G}{r},$$

где k — максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения, размерность — сантиметры.

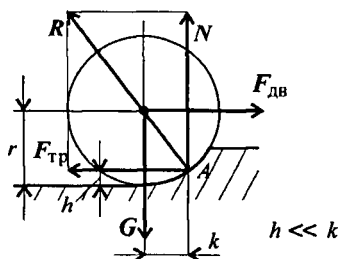


Рис. 13.4

Ориентировочные значения k (определяются экспериментально): сталь по стали — $k = 0,005$ см; резиновая шина по шоссе — $k = 0,24$ см.

Примеры решения задач

Пример 1. Свободная материальная точка, масса которой 5 кг, движется согласно уравнению $S = 0,48t^2 + 0,2t$. Определить величину движущей силы.

Решение

1. Ускорение точки: $a = v' = S''$; $v = S' = 0,96t + 0,2$;

$$a = v' = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

2. Действующая сила согласно основному закону динамики

$$F = ma; \quad F = 5 \cdot 0,96 = 4,8 \text{ Н.}$$

Пример 2. К двум материальным точкам массой $m_1 = 2$ кг и

$m_2 = 5$ кг приложены одинаковые силы. Сравнить величины ускорений.

Решение

Согласно третьей аксиоме динамики ускорения обратно пропорциональны массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5}{2} = 2,5; \quad a_1 = 2,5a_2.$$

Пример 3. На материальную точку действует система сил (рис. 13.5). Определить числовое значение ускорения, полученного материальной точкой $m = 7$ кг. Остальные данные представлены на чертеже.

Решение

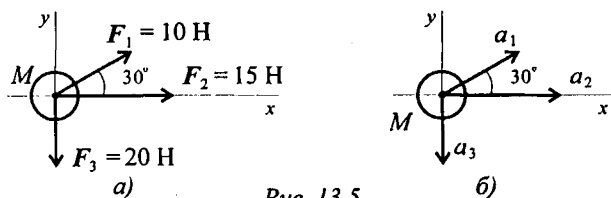


Рис. 13.5

1-й вариант.

1. Определяем суммарную силу, действующую на точку:

$$\sum_0^n F_{kx} = 15 + 10 \cdot \cos 30^\circ = 15 + 10 \cdot 0,866 = 23,66 \text{ Н};$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 10 \cdot \cos 60^\circ - 20 = -15 \text{ Н};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{23,66^2 + 15^2} = 28 \text{ Н}.$$

2. Определяем ускорение, сообщенное точке:

$$a_\Sigma = \frac{28}{7} = 4 \text{ м/с}^2.$$

2-й вариант.

Определяем ускорения от каждой из сил системы (рис. 13.56):

$$a_1 = \frac{10}{7} = 1,43 \text{ м/с}^2; \quad a_2 = \frac{15}{7} = 2,14 \text{ м/с}^2; \quad a_3 = \frac{20}{7} = 2,86 \text{ м/с}^2.$$

2. Определяем суммарное ускорение:

$$\begin{aligned} \sum_0^n a_x &= 1,43 \cdot 0,866 + 2,14 = 3,38 \text{ м/с}^2; \\ \sum_0^n a_y &= 1,43 \cdot 0,5 + (-2,86) = -2,14 \text{ м/с}^2; \\ a_\Sigma &= \sqrt{3,38^2 + 2,14^2} = 4 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют массой тела? Назовите единицу измерения массы в системе СИ.

2. Что является мерой инертности тела?

3. Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме.

4. На материальную точку действует постоянная сила. Как движется точка?

5. Какое ускорение получит точка, если на нее действует сила, равная удвоенной силе тяжести?

6. После столкновения двух материальных точек с массами $m_1 = 6 \text{ кг}$ и $m_2 = 24 \text{ кг}$ первая точка получила ускорение $1,6 \text{ м/с}^2$. Чему равно ускорение, полученное второй точкой?

7. В чем заключается принцип независимости действия сил?

8. Перечислите законы трения скольжения.

9. Перечислите факторы, влияющие на величину коэффициента трения скольжения.

10. Тело движется по наклонной плоскости вверх (рис. 13.6). Масса тела 10 кг , коэффициент трения $0,2$.

Определите возникающую силу трения.

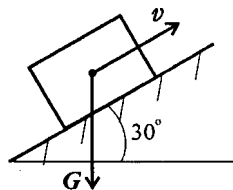


Рис. 13.6

ЛЕКЦИЯ 14

**Тема 1.13. Движение материальной точки.
Метод кинетостатики**

Иметь представление о свободных и несвободных материальных точках, о силах инерции, об использовании силы инерции для решения механических задач.

Знать формулы для расчета силы инерции при поступательном и вращательном движениях, знать принцип Даламбера уметь определять параметры движения с использованием законов динамики и метода кинетостатики.

Свободная и несвободная точки

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено какими-нибудь связями, называется *свободной*. Задачи решаются с помощью основного закона динамики.

Материальные точки, движение которых ограничено связями называются *несвободными*.

Для несвободных точек необходимо определять реакции связей. Эти точки движутся под действием активных сил и ограничивающих движение реакций связей (пассивных сил).

Несвободные материальные точки освобождаются от связей связи заменяются их реакциями. Далее несвободные точки можно рассматривать как свободные (принцип освобожденности от связей)

Сила инерции

Инертность — способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.

Сила инерции — сила, возникающая при разгоне или торможении тела (материальной точки) и направленная в обратную сторону от ускорения. Силу инерции можно измерить, она приложена к «связям» — телам, связанным с разгоняющимся или тормозящимся телом.

Рассчитано, что сила инерции равна

$$F_{\text{ин}} = |ma|.$$

Таким образом, силы, действующие на материальные точки m_1 и m_2 (рис. 14.1), при разгоне платформы соответственно равны

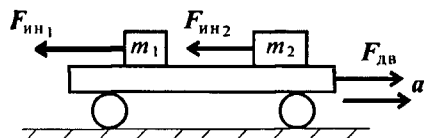


Рис. 14.1

$$F_{\text{ин}1} = m_1 a;$$

$$F_{\text{ин}2} = m_2 a.$$

Разгоняющееся тело (платформа с массой m (рис. 14.1)) силу инерции не воспринимает, иначе разгон платформы вообще был бы невозможен.

При вращательном движении (криволинейном) возникающее ускорение принято представлять в виде двух составляющих: нормального a_n и касательного a_t (рис. 14.2).

Поэтому при рассмотрении криволинейного движения могут возникнуть две составляющие силы инерции: нормальная и касательная $a = a_t + a_n$;

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v'; \quad a_t = \varepsilon r; \quad F_{\text{ин}}^t = m \varepsilon r;$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}; \quad F_{\text{ин}}^n = \frac{mv^2}{r}.$$

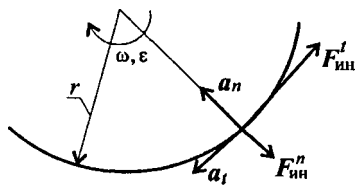


Рис. 14.2

При равномерном движении по дуге всегда возникает нормальное ускорение, касательное ускорение равно нулю, поэтому действует только нормальная составляющая силы инерции, направленная по радиусу из центра дуги (рис. 14.3).

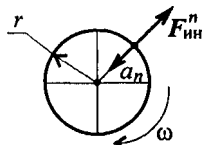


Рис. 14.3

$$\omega = \text{const};$$

$$F_{\text{ин}}^n = m a_n = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r.$$

Принцип кинетостатики (принцип Даламбера)

Принцип кинетостатики используют для упрощения решения ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям).

Даламбер предложил *условно прикладывать* силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum_0^n F_k + \sum_0^n R_k + F_{\text{ин}} = 0; \quad F_{\text{ин}} = -ma.$$

Порядок решения задач с использованием принципа Даламбера

1. Составить расчетную схему.
2. Выбрать систему координат.
3. Выяснить направление и величину ускорения.
4. Условно приложить силу инерции.
5. Составить систему уравнений равновесия.
6. Определить неизвестные величины.

Примеры решений задач

Пример 1. Рассмотрим движение платформы по шероховатой поверхности с ускорением (рис. 14.4).

Решение

Активные силы: движущая сила, сила трения, сила тяжести. Реакция в опоре R . Прикладываем силу инерции в обратную от ускорения сторону. По принципу Даламбера, система сил, действующих на платформу, становится уравновешенной, и можно составить уравнения равновесия. Наносим систему координат и составляем уравнения проекций сил.

$$\sum_0^n F_{kx} = 0 \Rightarrow F_{\text{дв}} - F_{\text{ин}} - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow R - G = 0;$$

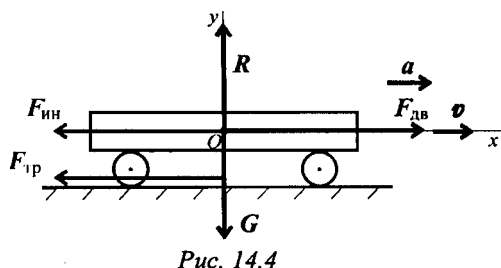


Рис. 14.4

$$|F_{ин}| = ma;$$

$$F_{тр} = fR,$$

где $F_{дв}$ — движущая сила;

$F_{тр}$ — сила трения;

G — сила тяжести;

R — реакция опоры;

$F_{ин}$ — сила инерции;

f — коэффициент трения.

Пример 2. Тело весом 3500 Н движется вверх по наклонной плоскости согласно уравнению $S = 0,16t^2$ (рис. 14.5). Определить величину движущей силы, если коэффициент трения тела о плоскость $f = 0,15$.

Решение

1. Составим расчетную схему, выберем систему координат с осью Ox вдоль наклонной плоскости.

Активные силы: движущая, сила трения, сила тяжести. Наносим реакцию в опоре перпендикулярно плоскости. Чтобы верно направить силу инерции, необходимо знать направление ускорения, определить это можно по уравнению движения.

При $a > 0$ движение равноускоренное.

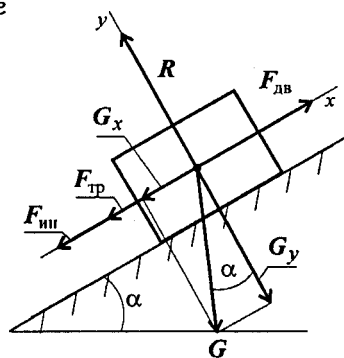


Рис. 14.5

2. Определяем ускорение движения:

$$a = v' = S''; v = S' = 0,32t; a = v' = 0,32 \text{ м/с}^2 > 0.$$

Силу $F_{ин}$ направим в обратную от ускорения сторону.

3. По принципу Даламбера составим уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad F_{дв} - G_x - F_{тр} - F_{ин} = 0; \quad G_x = G \sin 30^\circ.$$

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad R - G_y = 0; \quad G_y = G \cos 30^\circ; \quad R = G_y.$$

4. Подставим все известные величины в уравнения равновесия

$$F_{\text{тр}} = fR; \quad F_{\text{тр}} = fG_y = fG \cos 30^\circ;$$

$$F_{\text{ин}} = ma = \frac{G}{g}a;$$

$$F_{\text{дв}} - G \sin 30^\circ - fG \cos 30^\circ - \frac{G}{g}a = 0.$$

Выразим неизвестную силу и решим уравнение:

$$F_{\text{дв}} = 3500 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 3500 \cdot 0,866 + \frac{3500}{9,81} \cdot 0,32 = 2318,8 \text{ Н.}$$

Пример 3. График изменения скорости лифта при подъеме известен (рис. 14.6). Масса лифта с грузом 2800 кг. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на всех участках подъема

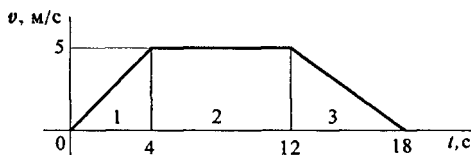


Рис. 14.6

Решение

1. Рассмотрим участок 1 — подъем с ускорением.

Составим схему сил (рис. 14.7).

Уравнение равновесия кабины лифта:

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad T_1 - G - F_{\text{ин}1} = 0; \quad T_1 = G + F_{\text{ин}1} = mg + ma_1,$$

где T — натяжение каната; G — сила тяжести; $F_{\text{ин}}$ — сила инерции растягивающая канат.

Для определения ускорения на участке 1 учтем, что движение на этом участке равнопеременное, скорость $v = v_0 + at$; $v_0 = 0$. Следовательно, ускорение:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4}; \quad a_1 = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

Определяем усилие натяжения каната при подъеме с ускорением

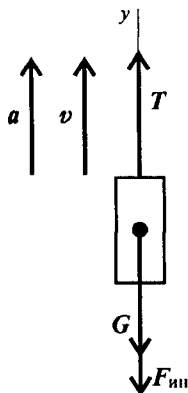


Рис. 14.7

$$2800(9,81 + 1,25) = 30\,968 \text{ Н}; \quad T_1 = 30,97 \text{ кН}.$$

2. Рассмотрим участок 2 — равномерный подъем.

Ускорение и сила инерции равны нулю. Натяжение каната равно силе тяжести.

$$T_2 - G = 0; \quad T_2 = G = mg;$$

$$T_2 = 2800 \cdot 9,81 \approx 28 \text{ кН}.$$

3. Участок 3 — подъем с замедлением.

Ускорение направлено в сторону, обратную направлению подъема. Составим схему сил (рис. 14.8).

$$\text{Уравнение равновесия: } F_{\text{ин}3} + T_3 - G = 0.$$

$$\text{Отсюда } T_3 = G - F_{\text{ин}3} = mg - ma_3.$$

Ускорение (замедление) на этом участке определяется с учетом того, что $v = 0$.

$$v_0 + a_3 t_3 = 0; \quad a_3 = -\frac{v_0}{t_3}; \quad a_3 = -\frac{5}{6} \text{ м/с}^2.$$

Натяжение каната при замедлении до остановки:

$$T_3 = 2800 \left(9,81 - \frac{5}{6} \right) = 25\,144 \text{ Н}; \quad T_3 = 25,14 \text{ кН}.$$

Таким образом, натяжение каната меняется при каждом подъеме и опускании, канат выходит из строя в результате усталости материала. Работоспособность зависит от времени.

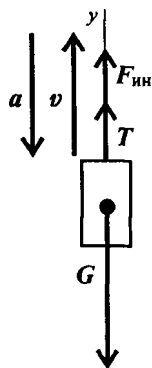


Рис. 14.8

Пример 4. Самолет выполняет «мертвую петлю» при скорости 160 м/с^2 , радиус петли 1000 м , масса летчика 75 кг . Определить величину давления тела на кресло в верхней точке «мертвой петли».

Решение

1. Схема сил, действующих на летчика (рис. 14.9):

где G — сила тяжести, R — реакция в опоре, $F_{ин}^n$ — сила инерции.

Сила давления летчика на кресло равна силе давления опоры на летчика.

2. Уравнение равновесия (движение равномерное по дуге, действует только нормальное ускорение): $F_{ин}^n - G - R = 0$

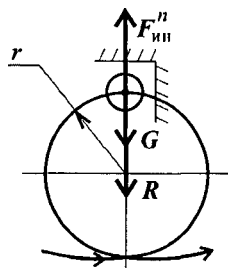


Рис. 14.9

$$R = F_{ин}^n - G; \quad R = m \frac{v^2}{r} - mg = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right)$$

$$R = 75 \left(\frac{160^2}{1000} - 9,81 \right) \approx 1184 \text{ Н.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните разницу между понятиями «инертность» и «сила инерции».

2. К каким телам приложена сила инерции, как направлена и по какой формуле может быть рассчитана?

3. В чем заключается принцип кинетостатики?

4. Задано уравнение движения материальной точки $S = 8,6t^2$. Определите ускорение точки в конце десятой секунды движения.

5. Тело движется вниз по наклонной плоскости (рис. 14.10). Нанесите силы, действующие на тело; используйте принцип Даламбера, запишите уравнение равновесия.

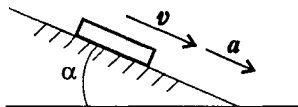


Рис. 14.10

6. Лифт спускается вниз с ускорением (рис. 14.11). Нанесите силы, действующие на кабину лифта, используя принцип кинетостатики, запишите уравнения равновесия.

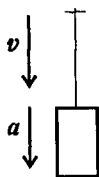


Рис. 14.11

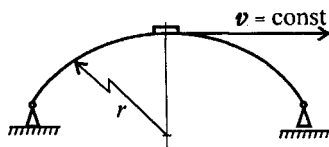


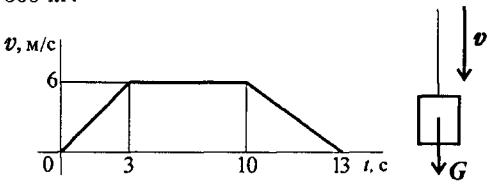
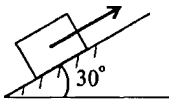
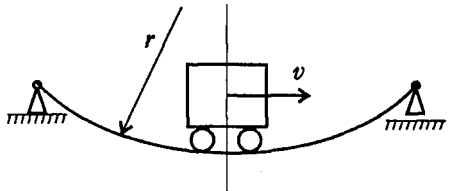
Рис. 14.12

7. Автомобиль въезжает на арочный мост с постоянной скоростью v (рис. 14.12). Нанесите силы, действующие на автомобиль в середине моста, используя принцип кинетостатики, запишите уравнения равновесия.

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

**Темы 1.12, 1.13. Динамика.
Движение материальной точки.
Метод кинетостатики**

В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
1. Под действием постоянной силы материальная точка массой 5 кг приобрела скорость 12 м/с за 6 с. Определить силу, действующую на точку.	5 Н	1
	10 Н	2
	15 Н	3
	20 Н	4
2. К двум материальным точкам приложены одинаковые силы. Массы точек $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 90$ кг. Сравнить величины полученных ускорений.	1 : 2	1
	1 : 3	2
	3 : 1	3
	4 : 1	4

Продолжение		
В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
3. График изменения скорости лифта при опускании показан на рисунке. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на первом участке движения. Масса нагруженного лифта 300 кг. 	600 Н	1
	2343 Н	2
	2943 Н	3
	3300 Н	4
4. Тело поднимается вверх согласно уравнению $S = 1,36 t^2$. Коэффициент трения о поверхность настила $f = 0,15$. Определить величину движущей силы. Сила тяжести 784,8 Н. 	117,72 Н	1
	217,6 Н	2
	392,4 Н	3
	711,9 Н	4
5. Мотоциклист въезжает на деревянный мост и прогибает его. Радиус кривизны моста 100 м. Сила тяжести мотоцикла с мотоциклистом 1500 Н. Скорость мотоцикла 72 км/ч. Определить силу прижатия мотоцикла к поверхности моста. 	611,6 Н	1
	888,4 Н	2
	1500 Н	3
	2111,6 Н	4

ЛЕКЦИЯ 15

Тема 1.14. Работа и мощность

Иметь представление о работе силы при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия.

Знать зависимости для определения силы трения, формулы для расчета работы и мощности при поступательном и вращательном движениях.

Уметь рассчитывать работу и мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

Работа

Для характеристики действия силы на некотором перемещении точки ее приложения вводят понятие «работа силы».

Работа служит мерой действия силы, работа — скалярная величина.

Работа постоянной силы на прямолинейном пути

Работа силы в общем случае численно равна произведению модуля силы на длину пройденного пути и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения (рис. 15.1):

$$W = FS \cos \alpha.$$

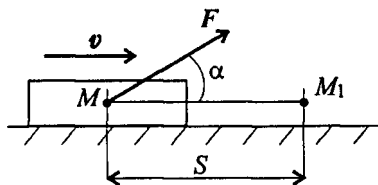


Рис. 15.1

Единицы измерения работы:

1 Дж (джоуль) = 1 Н·м; 1 кДж (килоджоуль) = 10^3 Дж.

Рассмотрим частные случаи.

1. Силы, совпадающие с направлением перемещения, называются *движущими силами*. Направление вектора силы совпадает с направлением перемещения (рис. 15.2).

В этом случае $\alpha = 0^\circ$ ($\cos \alpha = 1$). Тогда $W = FS > 0$.

2. Силы, перпендикулярные направлению перемещения, работы не производят (рис. 15.3).

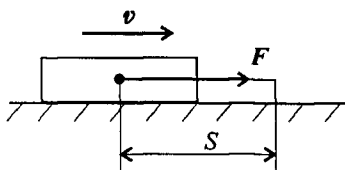


Рис. 15.2

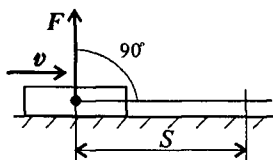


Рис. 15.3

Сила F перпендикулярна направлению перемещения. $\alpha = 90^\circ$ ($\cos \alpha = 0$); $W = 0$.

3. Силы, направленные в обратную от направления перемещения сторону, называются *силами сопротивления* (рис. 15.4).

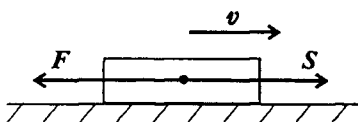


Рис. 15.4

Сила F направлена в обратную от перемещения S сторону.

В этом случае $\alpha = 180^\circ$ ($\cos \alpha = -1$), следовательно, $W = -FS < 0$.

Движущие силы увеличивают модуль скорости, силы сопротивления уменьшают скорость.

Таким образом, работа может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления силы и скорости.

Работа постоянной силы на криволинейном пути

Пусть точка M движется по дуге окружности и сила F составляет некоторый угол α с касательной к окружности (рис. 15.5).

Вектор силы можно разложить на две составляющие:

$$F = F_t + F_n.$$

Используя принцип независимости действия сил, определим работу каждой из составляющих силы отдельно:

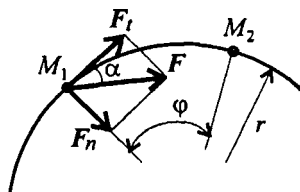


Рис. 15.5

$$W(F_t) = F_t \Delta \check{S}; \quad W(F_n) = F_n \Delta \check{S},$$

где $\Delta \check{S} = M_1 \check{M}_2$ — пройденный путь.

$$\Delta \check{S} = \varphi r.$$

Нормальная составляющая силы F_n всегда направлена перпендикулярно перемещению и, следовательно, работы не производит: $W(F_n) = 0$.

При перемещении по дуге обе составляющие силы разворачиваются вместе с точкой M . Таким образом, касательная составляющая силы всегда совпадает по направлению с перемещением.

Будем иметь: $W(F_t) = F_t \varphi r$.

Касательную силу F_t обычно называют *окружной силой*.

Работа при криволинейном пути — это работа окружной силы:

$$W(F) = W(F_t).$$

Произведение окружной силы на радиус называют *вращающим моментом*:

$$M_{\text{вр}} = F_t r.$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угол поворота:

$$W(F) = M_{\text{вр}} \varphi.$$

Работа силы тяжести

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки (рис. 15.6):

$$W(G) = G(h_1 - h_2) = G\Delta h,$$

где Δh — изменение высоты.

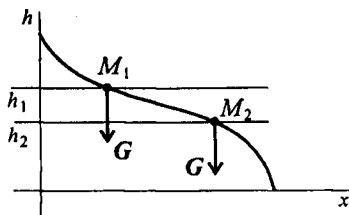


Рис. 15.6

При опускании работа положительна, при подъеме отрицательна.

Работа равнодействующей силы

Под действием системы сил точка массой m перемещается из положения M_1 в положение M_2 (рис. 15.7).

В случае движения под действием системы сил пользуются теоремой о работе равнодействующей.

Работа равнодействующей на некотором перемещении равна

алгебраической сумме работ системы сил на том же перемещении

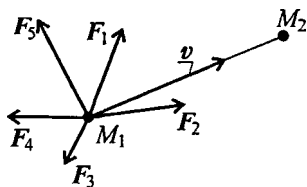


Рис. 15.7

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n.$$

Работа равнодействующей силы

$$W(\mathbf{F}_{\Sigma}) = \sum_0^n W(\mathbf{F}_k).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Тело массой 200 кг поднимают по наклонной плоскости (рис. 15.8).

Определите работу при перемещении на 10 м с постоянной скоростью. Коэффициент трения тела о плоскость $f = 0,15$.

Решение

1. При равномерном подъеме движущая сила равна сумме сил сопротивления движению. Нанесим на схему силы, действующие на тело:

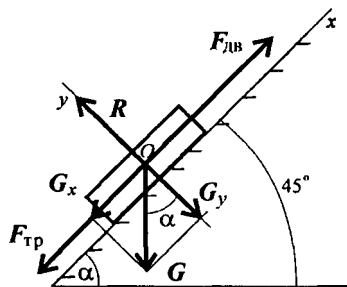


Рис. 15.8

$$\mathbf{F}_{\text{дв}} = \mathbf{R} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{G};$$

$$R = G_y = G \cos \alpha; \quad \alpha = 45^\circ; \quad F_{\text{тр}} = fR = fG \cos \alpha;$$

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad F_{\text{дв}} = G_x + F_{\text{тр}}.$$

2. Используем теорему о работе равнодействующей:

$$W(\mathbf{F}_{\text{дв}}) = W(\mathbf{R}) + W(\mathbf{F}_{\text{тр}}) + W(\mathbf{G}); \quad W(\mathbf{R}) = 0; \quad W(\mathbf{G}) = W(G_x).$$

3. Подставляем входящие величины и определяем работу по подъему:

$$W(\mathbf{F}_{\text{дв}}) = F_{\text{тр}}\Delta S + G_x\Delta S; \quad G = mg.$$

$$W(F_{\text{дв}}) = fG \cos \alpha \Delta S + G \sin \alpha \Delta S; \quad \Delta S = 10 \text{ м}, \quad \alpha = 45^\circ;$$

$$W(F_{\text{дв}}) = mg \Delta S (f \cos \alpha + \sin \alpha); \quad W(F_{\text{дв}}) = 200 \cdot 9,81 \cdot 10 (0,15 \cdot 0,7 + 0,7);$$

$$W(F_{\text{дв}}) = 15\,794 \text{ Дж.}$$

Пример 2. Определите работу силы тяжести при перемещении груза из точки A в точку C по наклонной плоскости (рис. 15.9). Сила тяжести тела 1500 Н . $AB = 6 \text{ м}$, $BC = 4 \text{ м}$.

Решение

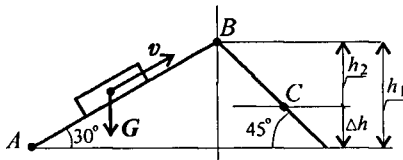


Рис. 15.9

1. Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты груза. Изменение высоты при перемещении из точки A в C :

$$\Delta h = h_1 - h_2;$$

$$\Delta h = AB \sin 30^\circ - BC \sin 45^\circ;$$

$$\Delta h = 6 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,7 = 0,2 \text{ м.}$$

2. Работа силы тяжести:

$$W(G) = G \Delta h = 1500 \cdot 0,2 = 300 \text{ Дж.}$$

Пример 3. Определите работу силы резания за 3 мин. Скорость вращения детали 120 об/мин , диаметр обрабатываемой детали 40 мм , сила резания 1 кН (рис. 15.10).

Решение

1. Работа при вращательном движении

$$W = F_{\text{рез}} \frac{d}{2} \varphi,$$

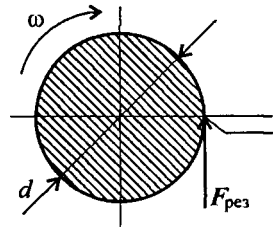


Рис. 15.10

где $F_{\text{рез}}$ — сила резания.

2. Угловая частота вращения 120 об/мин .

3. Число оборотов за заданное время составляет $z = 120 \cdot 3 = 360 \text{ об.}$

Угол поворота за это время $\varphi = 2\pi z$. $\varphi = 2 \cdot 3,14 \cdot 360 = 2261 \text{ рад.}$

4. Работа за 3 мин $W_p = 1 \cdot 0,02 \cdot 2261 = 45,2$ кДж.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие силы называют движущими?
2. Какие силы называют силами сопротивления?
3. Запишите формулы для определения работы при поступательном и вращательном движениях.
4. Какую силу называют окружной? Что такое вращающий момент?
5. Сформулируйте теорему о работе равнодействующей.

ЛЕКЦИЯ 16

Тема 1.14. Работа и мощность. Коэффициент полезного действия

Иметь представление о мощности при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия.

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях, КПД.

Уметь рассчитать мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

Мощность

Для характеристики работоспособности и быстроты совершения работы введено понятие мощности.

Мощность — работа, выполненная в единицу времени:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Единицы измерения мощности: ватты, киловатты,

$$1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт}; 10^3 \text{ Вт} = 1 \text{ кВт}.$$

Мощность при поступательном движении (рис. 16.1)

$$P = \frac{FS \cos \alpha}{t}.$$

Учитывая, что $\frac{S}{t} = v_{\text{ср}}$, получим

$$P = Fv_{\text{ср}} \cos \alpha,$$

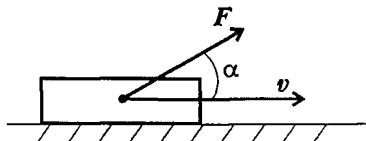


Рис. 16.1

где F — модуль силы, действующей на тело; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость движения тела.

Средняя мощность при поступательном движении равна произведению модуля силы на среднюю скорость перемещения и на косинус угла между направлениями силы и скорости.

Мощность при вращении (рис. 16.2)

Тело движется по дуге радиус r из точки M_1 в точку M_2 .

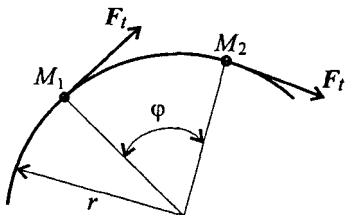


Рис. 16.2

$$M_1 M_2 = \varphi r.$$

Работа силы: $W = M_{\text{вр}} \varphi$
 $M_{\text{вр}} = F_t r$, где $M_{\text{вр}}$ — вращающий момент.

$$P = \frac{M_{\text{вр}} \varphi}{t}.$$

Учитывая, что $\frac{\varphi}{t} = \omega_{\text{ср}}$, получим

$P = M_{\text{вр}} \omega_{\text{ср}}$, где $\omega_{\text{ср}}$ — средняя угловая скорость.

Мощность силы при вращении равна произведению вращающего момента на среднюю угловую скорость.

Если при выполнении работы усилие машины и скорость движения меняются, можно определить мощность в любой момент времени, зная значения усилия и скорости в данный момент.

Коэффициент полезного действия

Каждая машина и механизм, совершая работу, тратит часть энергии на преодоление вредных сопротивлений.

Таким образом, машина (механизм) кроме полезной работы совершает еще и дополнительную работу.

Отношение полезной работы к полной работе или полезной мощности ко всей затраченной мощности называется коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \text{КПД} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}}.$$

Полезная работа (мощность) расходуется на движение с заданной скоростью и определяется по формулам:

$$W = FS \cos \alpha, \quad P = Fv \cos \alpha;$$

$$W = M_{\text{вр}} \varphi, \quad P = M_{\text{вр}} \omega.$$

Затраченная мощность больше полезной на величину мощности, идущей на преодоление трения в звеньях машины, на утечки и тому подобные потери.

Чем выше КПД, тем совершеннее машина.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить потребную мощность мотора лебедки для подъема груза весом 3 кН на высоту 10 м за 2,5 с (рис. 16.3). КПД механизма лебедки 0,75.

Решение

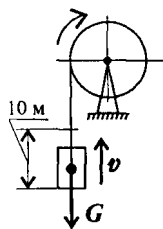


Рис. 16.3

1. Мощность мотора используется на подъем груза с заданной скоростью и преодоление вредных сопротивлений механизма лебедки.

Полезная мощность определяется по формуле $P = Fv \cos \alpha$. В данном случае $\alpha = 0$; груз движется поступательно.

2. Скорость подъема груза $v = \frac{S}{t}$; $v = \frac{10}{2,5} = 4 \text{ м/с}$.

3. Необходимое усилие равно весу груза (равномерный подъем).

4. Полезная мощность $P = 3000 \cdot 4 = 12\,000 \text{ Вт}$.

5. Полная мощность, затрачиваемая мотором,

$$P_{\text{мотора}} = \frac{P}{\eta}. \quad P_{\text{мотора}} = \frac{12}{0,75} = 16 \text{ кВт}.$$

Пример 2. Судно движется со скоростью 56 км/ч (рис. 16.4). Двигатель развивает мощность 1200 кВт. Определить силу сопротивления воды движению судна. КПД машины 0,4.

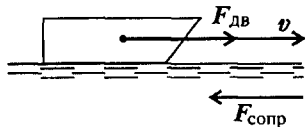


Рис. 16.4

Решение

1. Определяем полезную мощность, используемую на движение с заданной скоростью:

$$P = F_{\text{дв}} v \cos \alpha.$$

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{мотора}}}; \quad P = P_{\text{мотора}}\eta; \quad P = 1200 \cdot 0,4 = 480 \text{ кВт.}$$

2. По формуле для полезной мощности можно определить движущую силу судна с учетом условия $\alpha = 0$. При равномерном движении движущая сила равна силе сопротивления воды: $F_{\text{дв}} = F_{\text{сопр.}}$.

3. Скорость движения судна $v = \frac{36 \cdot 1000}{3600} = 10 \text{ м/с.}$

4. Сила сопротивления воды

$$F_{\text{сопр}} = \frac{P}{v}; \quad F_{\text{сопр}} = \frac{480\,000}{10} = 48\,000 \text{ Н.}$$

Сила сопротивления воды движению судна $F_{\text{сопр}} = 48 \text{ кН.}$

Пример 3. Точильный камень прижимается к обрабатываемой детали с силой 1,5 кН (рис. 16.5). Какая мощность затрачивается на обработку детали, если коэффициент трения материала камня о деталь 0,28; деталь вращается со скоростью 100 об/мин, диаметр детали 60 мм.

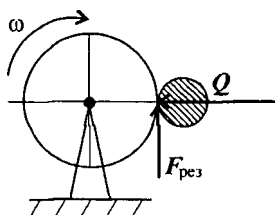


Рис. 16.5

Решение

1. Резание осуществляется за счет трения между точильным камнем и обрабатываемой деталью:

$$F_{\text{рез}} = F_{\text{тр}} = fQ; \quad F_{\text{тр}} = 0,28 \cdot 1,5 = 0,42 \text{ кН.}$$

2. Момент силы резания $M = F_{\text{тр}} \frac{d}{2}$; $M = 420 \cdot 0,03 = 12,6 \text{ Н·м.}$

3. Угловая скорость вращения детали

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 100}{30} = 10,47 \text{ рад/с.}$$

4. Мощность, необходимая для обработки детали:

$$P = M\omega; \quad P = 12,6 \cdot 10,47 = 132 \text{ Вт.}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулы для расчета работы при поступательном и вращательном движениях.

2. Вагон массой 1000 кг перемещают по горизонтальному пути на 5 м, коэффициент трения 0,15. Определите работу силы тяжести.

3. Колодочным тормозом останавливают барабан после отключения двигателя (рис. 16.6). Определите работу торможения за 3 оборота, если сила прижатия колодок к барабану 1 кН, коэффициент трения 0,3.

4. Натяжение ветвей ременной передачи $S_1 = 700$ Н, $S_2 = 300$ Н (рис. 16.7). Определите вращающий момент передачи.

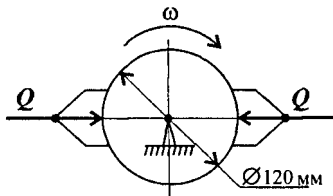


Рис. 16.6

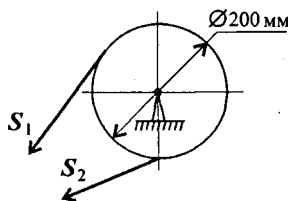


Рис. 16.7

5. Запишите формулы для расчета мощности при поступательном и вращательном движениях.

6. Определите мощность, необходимую для подъема груза весом 0,5 кН на высоту 10 м за 1 мин.

7. Определите общий КПД механизма, если при мощности двигателя 12,5 кВт и общей силе сопротивления движению 2 кН скорость движения 5 м/с.

8. Ответьте на вопросы тестового задания.

Тема 1.14. Динамика. Работа и мощность

В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
1. Вагон массой 680 кг катится равномерно по горизонтальному пути и проходит 15 м. Чему равна работа силы тяжести?	10 200 Дж	1
	100 062 Дж	2
	0	3
	125 000 Дж	4

Продолжение		
В о п р о с ы	О т в е т ы	К о д
2. Мощность токарного станка 1,5 кВт. Обточка детали производится за 3 мин. КПД станка 0,8. Определить работу, совершаемую при обточке.	270 кДж	1
	216 кДж	2
	4500 Дж	3
	3600 Дж	4
3. Определить потребную мощность станка для обработки детали диаметром 300 мм при угловой частоте вращения 120 об/мин и силе резания 1 кН. КПД станка 0,85.	1,884 кВт	1
	2,216 кВт	2
	4,5 кВт	3
	18 кВт	4
4. Определить вращающий момент на валу электродвигателя при мощности 8 кВт и угловой скорости 100 рад/с. КПД двигателя 0,8.	80 Н·м	1
	64 Н·м	2
	46 Н·м	3
	Верный ответ не приведен	4
5. Определить потребную мощность мотора лебедки для подъема груза 3,6 кН на высоту 120 м за 1 мин.	2,59 кВт	1
	43,2 кВт	2
	7,2 кВт	3
	27,3 кВт	4

ЛЕКЦИЯ 17

Тема 1.15. Общие теоремы динамики

Иметь представление о понятиях «импульс силы», «количество движения», «кинетическая энергия»; о системе материальных точек, о внутренних и внешних силах системы.

Знать основные теоремы динамики, основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела, формулы для расчета моментов инерции некоторых однородных твердых тел.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость mv .

Вектор количества движения совпадает по направлению с вектором скорости. Единица измерения $[mv] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Произведение постоянного вектора силы на некоторый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, называется *импульсом силы Ft* .

Вектор импульса силы по направлению совпадает с вектором силы. $[Ft] = \text{Н} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$.

Используя основное уравнение динамики, после преобразования можно получить соотношение между количеством движения и импульсом силы (рис. 17.1).

$$F = ma; \quad a = \frac{dv}{dt} = v'.$$

$$F = m \frac{dv}{dt}. \quad F dt = m dv.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

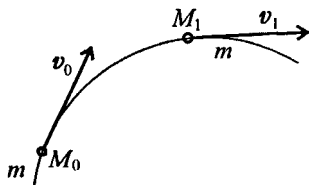


Рис. 17.1

$$\int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{v_0}^v m dv; \quad \mathbf{F}t = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0).$$

Полученное соотношение выражает теорему об изменении количества движения точки:

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующему на точку в течение того же промежутка времени.

Теорема об изменении кинетической энергии

Энергией называется способность тела совершать механическую работу.

Существуют две формы механической энергии: потенциальная энергия, или энергия положения, и кинетическая энергия, или энергия движения.

Потенциальная энергия (Π) определяет способность тела совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря. Потенциальная энергия численно равна работе силы тяжести.

$\Pi = Gh$, где h — высота точки над уровнем моря.

Кинетическая энергия (K) определяется способностью движущегося тела совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия — величина скалярная, положительная.

Единицы измерения: $[\Pi] = [Gh] = \text{Н} \cdot \text{м}$; $[K] = \left[\frac{mv^2}{2}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Энергия имеет размерность работы.

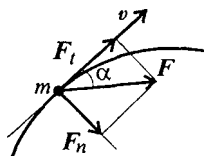


Рис. 17.2

Запишем для материальной точки (рис. 17.2) основное уравнение движения

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Спроектируем обе части векторного равенства на направление скорости:

$$F \cos \alpha = ma \cos \alpha.$$

Известно, что $a \cos \alpha = a_t = \frac{dv}{dt}$.

Откуда $F \cos \alpha = m \frac{dv}{dt}$.

Умножив обе части полученного выражения на некоторое перемещение dS , получим:

$$F \cos \alpha dS = m \frac{dv}{dt} dS; \quad m \frac{dv}{dt} dS = mv dv.$$

Интегрируем обе части равенства $\int_0^t F \cos \alpha dS = m \int_{v_0}^v v dv$.

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии точки:

Изменение кинетической энергии на некотором пути равно работе всех действующих на точку сил на том же пути.

Основы динамики системы материальных точек

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется механической системой.

Любое материальное тело в механике рассматривается как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек.

Из определения механической системы следует, что движение каждой из точек, входящих в систему, *зависит* от движения остальных точек.

Силы, действующие на точки системы, делятся на *внешние* и *внутренние*. Силы взаимодействия между точками этой системы называют *внутренними*. К *внешним* силам относятся силы, действующие со стороны точек, *не входящих* в эту систему.

Примерами внешних сил являются сила тяжести, сила давления, сила трения и др.

К внутренним силам относятся силы упругости.

Движение механической системы зависит не только от внешних сил, но и от *суммарной массы системы* $m = \sum_0^n \Delta m_k$, где Δm_k — масса отдельных точек механической системы.

Движение системы зависит и от положения центра масс системы — условной точки, в которой сосредоточена вся масса тела. Обычно считают, что в центре масс *приложены все внешние силы*.

Движение центра масс определяет движение всей системы только при поступательном движении, при котором все точки тела движутся одинаково.

Основное уравнение динамики при поступательном движении тела

Для определения движения тела (системы материальных точек) можно использовать второй закон динамики

$$F_{\Sigma} = ma_c,$$

где m — суммарная масса тела; a_c — ускорение центра масс тела.

В поле земного притяжения *центр масс совпадает с центром тяжести*.

Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело под действием внешних сил вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω (рис. 17.3).

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем ее на множество материальных точек с массами Δm_k . Каждая точка движется по окружности радиуса r_k с касательным ускорением $a_k^t = \varepsilon r_k$ и нормальным ускорением $a_k^n = \omega^2 r_k$, где ε — угловое ускорение.

Используем для каждой точки принцип Даламбера и приложим силы инерции:

- касательную $\Delta F_{инк}^t = -\Delta m_k a_k^t$;
- нормальную $\Delta F_{инк}^n = -\Delta m_k a_k^n$.

Система сил, действующих на точку, по принципу Даламбера, находится в равновесии.

Поэтому алгебраическая сумма моментов относительно оси вращения должна быть равна нулю: $M_z - \sum_0^n \Delta F_{инк}^t r_k = 0$, где M_z — момент внешних сил.

Моменты нормальных сил инерции $F_{инк}^n$ равны нулю, т. к. силы пересекают ось z . Силы, направленные по касательной к окружности, равны

$$\Delta F_{инк}^t = \Delta m_k a_k^t = \Delta m_k \varepsilon r_k,$$

где ε — общая величина, угловое ускорение тела.

Подставив значение силы в формулу для определения моментов, получим

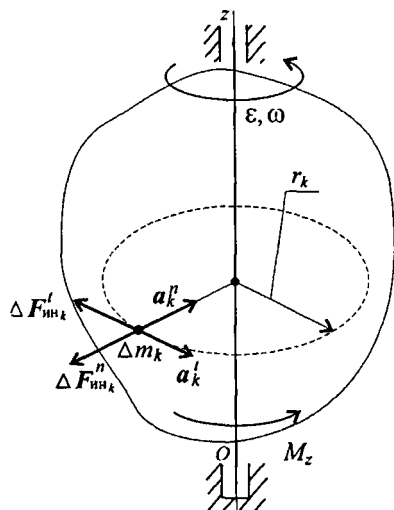


Рис. 17.3

$$M_z = \varepsilon \sum_0^n \Delta m_k r_k^2.$$

Величина $\sum_0^n \Delta m_k r_k^2$ называется *моментом инерции тела относительно оси вращения* и обозначается J_z .

$$J_z = \sum_0^n \Delta m_k r_k^2.$$

В результате получим выражение основного уравнения динамики вращающегося тела:

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где M_z — сумма моментов внешних сил относительно оси; ε — угловое ускорение тела.

Момент инерции тела в этом выражении определяет *меру инертности* тела при вращении.

По выражению для момента инерции можно определить, что единица измерения этой величины в системе СИ $[J_z] = [mr^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Видно, что значение момента инерции зависит от распределения массы относительно оси вращения: при одинаковой массе момент инерции больше, если основная часть массы расположена дальше от оси вращения. Для увеличения момента инерции используют колеса со спицами и отверстиями.

Моменты инерции некоторых тел

Момент инерции сплошного цилиндра (рис. 17.4) $J_z = \frac{mr^2}{2}$.

Момент инерции полого тонкостенного цилиндра (рис. 17.5) $J_z = mr^2$.

Момент инерции прямого тонкого стержня любого поперечного сечения

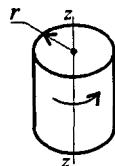


Рис. 17.4

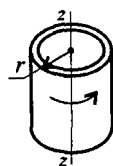
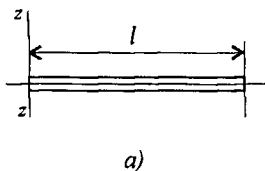


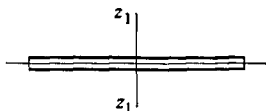
Рис. 17.5

$$J_z = \frac{ml^2}{3} \text{ (относительно } zz, \text{ рис. 17.6a);}$$

$$J_{z_1} = \frac{ml^2}{12} \text{ (относительно } z_1z_1, \text{ рис. 17.6б).}$$



а)



б)

Рис. 17.6

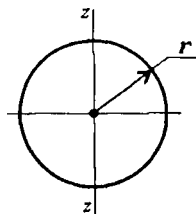


Рис. 17.7

Момент инерции шара (рис. 17.7) $J_z = \frac{2}{5}mr^2$.

Примеры решения задач

Пример 1. Автомобиль двигался со скоростью 54 км/ч. В результате резкого торможения автомобиль остановился. Определите время торможения, если коэффициент трения между поверхностью дороги и колесами автомобиля 0,36.

Решение

Принимаем автомобиль за материальную точку (рис. 17.8).

1. Считаем, что торможение произошло только за счет трения. Используем теорему об изменении количества движения. Начальная скорость $v_0 = \frac{54 \cdot 1000}{3600} = 15$ м/с. По теореме изменения количества движения $mv - mv_0 = F_T t$. Конечная скорость $v = 0$ (остановка).

2. Тормозная сила $F_T = -fR$.

$$R = G = mg,$$

здесь R — сила прижатия; f — коэффициент трения; G — сила тяжести; m — масса автомобиля; g — ускорение свободного падения; $g = 9,81$ м/с².

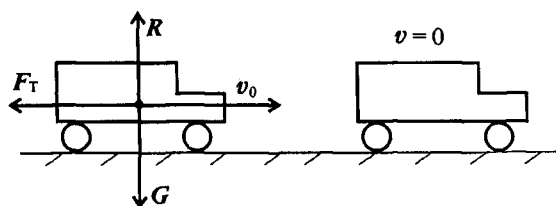


Рис. 17.8

3. После подстановок получаем формулу для определения времени торможения.

$$mv - mv_0 = -fmg t;$$

$$v_0 = fgt; \quad t = \frac{v_0}{fg};$$

$$t = \frac{15}{0,36 \cdot 9,81} \approx 4,25 \text{ с.}$$

Пример 2. После отключения двигателя колесо радиусом 0,5 м и массой 700 кг имело угловую частоту вращения 300 об/мин. Определите момент трения в подшипниках, если вал колеса остановился через 1,5 мин. Вращение принять равнопеременным, колесо считать сплошным цилиндром (рис. 17.9).

Решение

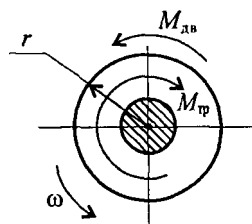


Рис. 17.9

1. Запишем уравнение динамики при вращении:

$$M_{\Sigma} = J\varepsilon = M_{\text{дв}} - M_{\text{тр}},$$

где M_{Σ} — суммарный момент внешних сил; J — момент инерции; ε — угловое ускорение; $M_{\text{дв}}$ — движущий момент; $M_{\text{тр}}$ — момент трения (сил сопротивления).

2. Определим угловое ускорение по формуле для угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30}; \quad \omega_0 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ рад/с}; \quad \omega = 0 \text{ (остановка)}.$$

Тогда

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}; \quad \varepsilon = -\frac{31,4}{1,5 \cdot 60} = -0,35 \text{ рад/с}^2.$$

3. Определим момент инерции колеса, считая его сплошным цилиндром:

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{700 \cdot 0,5^2}{2} = 87,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем величину тормозного момента — момента трения в подшипниках: $M_{\text{дв}} = 0$; $-M_{\text{тр}} = J\varepsilon$;
 $-M_{\text{тр}} = 87,5(-0,35)$; $M_{\text{тр}} = 30,625 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Пример 3. Шкив приводится во вращение ременной передачей (рис. 17.10). Натяжение ведущей ветви ремня $S_1 = 120 \text{ Н}$, ведомого — $S_2 = 50 \text{ Н}$. Масса шкива 200 кг, диаметр 80 мм, момент сопротивления в подшипниках 1,2 Н·м. Определить угловое ускорение вала пренебрегая его массой. Шкив считать тонкостенным цилиндром.

Решение

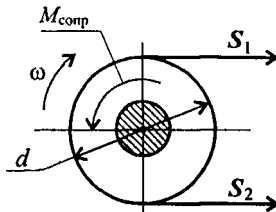


Рис. 17.10

1. Используем основное уравнение динамики $M_{\Sigma} = J\varepsilon$.

2. Определяем суммарный момент внешних сил

$$M_{\Sigma} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} - M_{\text{сопр}};$$

$$M_{\Sigma} = 120 \cdot \frac{0,08}{2} - 50 \cdot \frac{0,08}{2} - 1,2 = 1,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Рассчитываем момент инерции шкива, влиянием вала пренебрегаем:

$$J = mr^2; \quad J = 200 \left(\frac{0,08}{2} \right)^2 = 0,128 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем угловое ускорение шкива

$$\varepsilon = \frac{M_{\Sigma}}{J}; \quad \varepsilon = \frac{1,6}{0,128} = 12,5 \text{ рад/с}^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Тело массой 10 кг поднято на высоту 6 м. Определите потенциальную энергию тела и работу, которую совершит тело при падении с этой высоты.

2. Материальная точка массой 16 кг, движущаяся со скоростью 10 м/с, остановилась через 40 с. Определите величину тормозной силы.

3. Тело массой 9,2 кг двигалось из состояния покоя 3 с с ускорением 4 м/с^2 под действием силы F . Определите запас кинетической энергии, накопленный телом.

4. Сплошной однородный цилиндр вращается вокруг продольной оси (рис. 17.11). От каких параметров зависит момент инерции цилиндра?

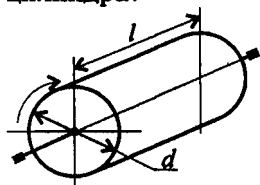


Рис. 17.11

Варианты ответов:

1. Только от m .

2. От m и d .

3. От l , m и d .

4. От l и m .

5. Определите вращающий момент на шкиве (рис. 17.12); $d = 60 \text{ мм}$.

6. По результату решения предыдущей задачи (вопрос 5) определите момент инерции шкива, если, двигаясь из состояния покоя, он приобрел угловую скорость 50 рад/с за 10 с.

П р и м е ч а н и е.

При ответах на контрольные вопросы ускорение свободного падения можно принимать равным 10 м/с^2 .

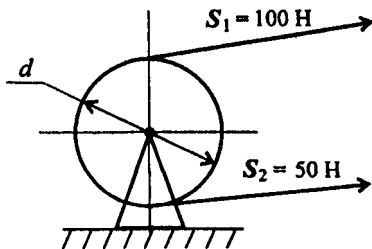


Рис. 17.12